WS KV Chur

Mathematik schriftlich

Lehrabschlussprüfungen 2009
für die Berufsmatura kaufmännische Richtung

LÖSUNGEN

Kandidatennummer ______________

Name ______________________

Vorname ______________________

Datum der Prüfung ______________

Bewertung	mögliche Punkte	erteilte Punkte
1. Aufgabe	13	______
2. Aufgabe	9	______
3. Aufgabe	16	______
4. Aufgabe	13	______
5. Aufgabe	15	______
6. Aufgabe	7	______
7. Aufgabe	15	______
8. Aufgabe	7	______
9. Aufgabe	5	______
Total	**100**	______

Note: ______

Material Arbeitsblätter, Zusatzblätter

Hilfsmittel Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 150 Minuten

Hinweise

- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Schlussresultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Alle Ausrechnungen und Resultate schreiben Sie auf diese Blätter, wenn nötig auch auf die Rückseite. Für reine Entwürfe und Versuche verwenden Sie das Zusatzpapier.

1. Algebraische Umformungen

a) Vereinfachen Sie den folgenden Quotienten so weit wie möglich.

$$\frac{n}{n^2-1} \div \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)$$

Lösung:

$$= \frac{n}{(n-1)(n+1)} \div \left(\frac{n-1-(n+1)}{(n-1)(n+1)}\right) = \frac{n(n-1)(n+1)}{(n-1)(n+1)(-2)} = \underline{\underline{\frac{n}{-2}}}$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	3	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

b) Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie die Lösung als Potenz.

$$\sqrt[3]{\left(a \cdot \sqrt[8]{a^{-5}}\right)^2}$$

Lösung:

$$= \left(\left(a \cdot a^{-\frac{5}{8}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\left(1-\frac{5}{8}\right)\cdot 2 \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{3\cdot 2}{8\cdot 3}} = \underline{\underline{a^{\frac{1}{4}}}}$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	3	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

c) Berechnen Sie folgenden Logarithmus-Term. Vereinfachen Sie zuerst.

$$3 \cdot \log_a(a^2) + \log_a\left(\frac{a^3}{\sqrt{a}}\right)$$

Lösung:

$$= 3 \cdot \underbrace{\log_a a^2}_{=2} + \log_a a^{3-\frac{1}{2}} = 6 + (3 - \frac{1}{2}) = \underline{\underline{8.5}}$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	3	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

d) Berechnen Sie folgenden Ausdruck, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten:

$$\frac{16a^{-2}}{b^2 c^{-3}} \div \frac{(2a)^2}{b^{-2}(2c)^{-3}}$$

Lösung:

$$= \frac{16 \cdot a^{-2} b^{-2} 2^{-3} c^{-3}}{b^2 c^{-3} 2^2 a^2} = \frac{16 \cdot 2^{-3}}{2^2} \cdot \frac{a^{-2}}{a^2} \cdot \frac{b^{-2}}{b^2} \cdot \frac{c^{-3}}{c^{-3}}$$

$$= \frac{1}{2} a^{-2-2} b^{-2-2} \underbrace{c^{-3-(-3)}}_{=0} = \underline{\underline{\frac{1}{2} a^{-4} b^{-4}}} \left(= \frac{1}{2}(ab)^{-4} \right)$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	4	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

2. Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystem in der Grundmenge G = $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{18}{3x} + \dfrac{40}{2y+10} = 4 \\ \dfrac{18}{2x} - \dfrac{20}{y+5} \quad = 1 \end{array} \right|$$

Lösung:

D = $\mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}\backslash\{-5\}$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{18}{3x} + \dfrac{20}{y+5} = 4 \\ \dfrac{18}{2x} - \dfrac{20}{y+5} = 1 \end{array} \right|$$

I + II : $\dfrac{18}{3x} + \dfrac{18}{2x} = 4 + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{36}{6x} + \dfrac{54}{6x} = 5 \quad \Rightarrow \quad 90 = 30x \quad \Rightarrow \quad \underline{3 = x}$

in II: $\dfrac{18}{2 \cdot 3} - \dfrac{20}{y+5} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 - \dfrac{20}{y+5} = 1 \quad \Rightarrow \quad -20 = -2(y+5) \quad \Rightarrow \quad -10 = -2y$

$\Rightarrow \quad \underline{5 = y}$

$$\underline{\underline{L = \{(3/5)\}}}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	2	Für x und y: 1
x berechnen	4	pro Verfahrenfehler:-2 pro Rechenfehler:-1
y berechnen	2	pro Fehler: -2
Lösungsmenge	1	Fehler:-1

3. Gleichungen

a) Lösen Sie die folgende Wurzelgleichung. Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge sind anzugeben.

$$\sqrt{4x-16}-\sqrt{x-4}=2$$

Lösung:

1. Variante:

$$\underline{\underline{D=D_1=D_2=\{x\in R \mid x\geq 4\}}}$$

$$\sqrt{4x-16}-\sqrt{x-4}=2$$

$$\sqrt{4(x-4)}-\sqrt{x-4}=2$$

$$2\sqrt{x-4}-\sqrt{x-4}=2$$

$$\sqrt{x-4}=2$$

$$x-4=4$$

$$\underline{x=8}$$

Probe: $\sqrt{4\cdot 8-16}-\sqrt{8-4}=2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{L=\{8\}}}$

2.Variante:

$$\underline{\underline{D=D_1=D_2=\{x\in R \mid x\geq 4\}}}$$

$$4x-16+x-4-2\sqrt{4x-16}\sqrt{x-4}=4$$

$$-2\sqrt{4x-16}\sqrt{x-4}=24-5x$$

$$4(4x-16)(x-4)=25x^2-240x+576$$

$$16x^2-64x-64x+256=25x^2-240x+576$$

$$0=9x^2-112x+320$$

$$x_{1,2} = \frac{112 \pm \sqrt{112^2 - 4 \cdot 9 \cdot 320}}{2 \cdot 9} = \frac{112 \pm 32}{18}$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = \frac{40}{9}$$

Probe: x_1 richtig, x_2 falsch $\Rightarrow$ $\underline{\underline{L = \{8\}}}$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	2	wenn Bed. Falsch: -2,nicht ganz korrekte Schreibweise: -1
x berechnen	4	pro Fehler:-2
Kontrolle/Probe	2	Fehlen: -2 Rechenfehler: -1
Lösungsmenge	1	Fehler: -1

b) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}$. Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge sind anzugeben.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-x-5} = 16^x$$

Lösung:

<u>D = ℝ</u>

1.Variante: (auch mit Basis 2!!!)

$$4^{x+5} = \left(4^2\right)^x$$

$$4^{x+5} = 4^{2x}$$

$$x + 5 = 2x$$

$$\underline{5 = x}$$

2. Variante:

$$4^{x+5} = 16^x$$

$$4^x \cdot 4^5 = 16^x$$

$$4^5 = \frac{16^x}{4^x}$$

$$1024 = 4^x$$

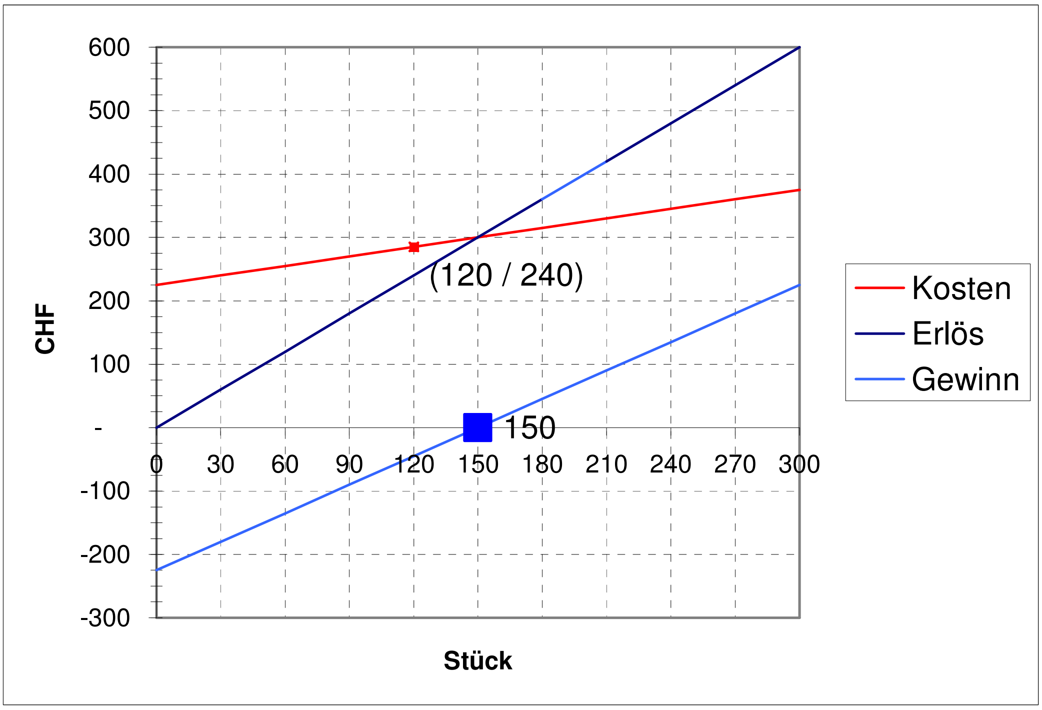
$$\underline{x = \log_4 1024 = 5}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L = \{5\}}}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	1	Fehler: -1
x berechnen	5	pro Fehler:-2
Lösungsmenge	1	Fehler: -1

4. Lineare Funktionen

Die Firma Kulli produziert Kugelschreiber und verkauft sie gemäss unten eingezeichneter Erlösfunktion.



a) Formulieren Sie die Funktionsgleichung für diese Erlösfunktion.

$P_1(120/240)$, $P_2(0/0)$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{240-0}{120-0} = 2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 2x}}$$

	Maximum	Abzug
m berechnen	1	Fehler: -1
Funktionsgleichung	1	pro Fehler:-1

b) Die Kosten bei der Herstellung betragen 375 Franken bei 300 Stück und 275 Franken bei 100 Stück.

b1) Wie lautet die Gleichung für die Kostenfunktion?
b2) Wie lautet die Gleichung für die Gewinnfunktion?

Kostenfunktion:

$$\left| \begin{array}{l} 375 = m \cdot 300 + q \\ 275 = m \cdot 100 + q \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 375 - 300m = 275 - 100m \quad \Rightarrow \quad \underline{m = 0.5}$$

in I: $375 = 0.5 \cdot 300 + q \quad \Rightarrow \quad \underline{q = 225}$

$$\underline{\underline{y = 0.5x + 225}}$$

Gewinnfunktion:

Gewinnfunktion = Erlösfunktion – Kostenfunktion: $-\begin{cases} y = 2x \\ y = 0.5x + 225 \end{cases}$

$$\underline{\underline{y = 1.5x - 225}}$$

	Maximum	Abzug
Gleichungssystem und ausrechnen:	3	Fehler: -1
Gewinnfunktion ausrechnen	2	Fehler:-1
Funktionsgleichungen (beide!)	1	pro Fehler:-1

c) Zeichnen Sie die Funktionen von b) in das obige Koordinatensystem ein. Alle Funktionen sind anzuschreiben.

	Maximum	Abzug
Je Gerade 1 Punkt	2	Fehler: -1

d) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle (Nutzschwelle) grafisch (einzeichnen) und rechnerisch?

1. Variante:
(Gewinnfunktion Null setzen)

$$0 = 1.5x - 225$$
$$225 = 1.5x$$
$$\underline{\underline{150 = x}}$$

2. Variante:
(Erlös- mit Kostenfunktion gleich setzen)

$$0.5x + 225 = 2x$$
$$225 = 1.5x$$
$$\underline{\underline{150 = x}}$$

	Maximum	Abzug
Einzeichnen	1	Fehler: -1
Gewinnschwelle berechnet	2	Fehler:-1 wenn Idee falsch, dann 0 Punkte!

5. Quadratische Funktionen

Gegeben sind folgende zwei Funktionen:

f_1: $y=\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{9}{2}$

f_2: $y=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{2}$

a) Berechnen Sie von der Parabel den Scheitelpunkt und die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen.

Lösung a):

Nullstellen:

$$0=\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{9}{2}$$
$$0=x^2+10x+9$$
$$0=(x+1)(x+9)$$
$$x_1=-1,\quad x_2=-9 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{N_1(-1/0),\quad N_2(-9/0)}}$$

Scheitelpunkt:

1. Variante:

$$x_s=\frac{-1+(-9)}{2}=-5$$
$$\Rightarrow\quad y_s=\frac{1}{2}(-5)^2+5(-5)+\frac{9}{2}=-8$$

2. Variante:

$$S\left(\frac{-b}{2a}/c-\frac{b^2}{4a}\right)$$
$$S\left(\frac{-5}{2\cdot 0.5}/\frac{9}{2}-\frac{25}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \underline{\underline{S(-5/-8)}}$$

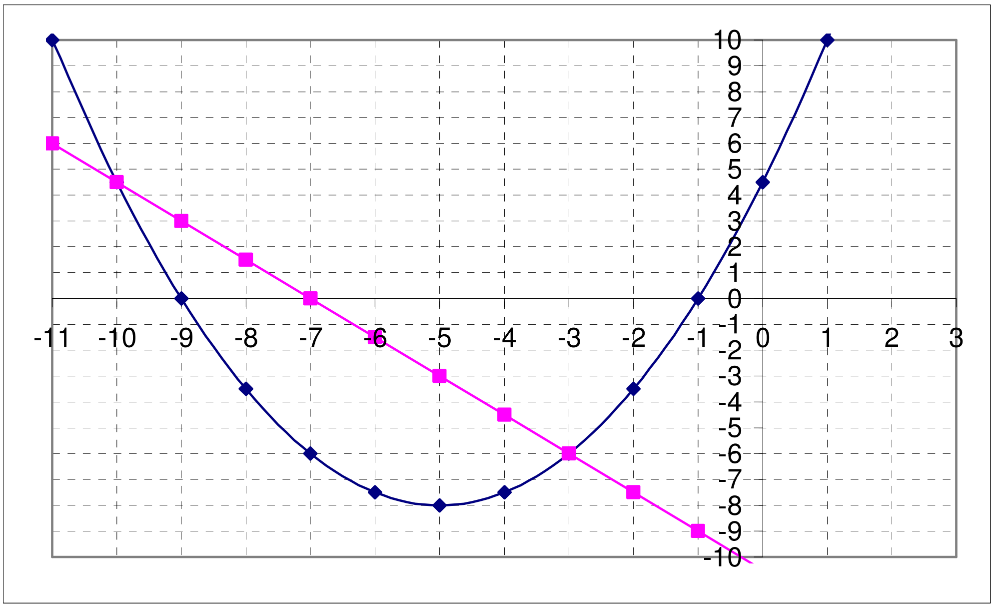
Schnittpunkt mit y-Koordinatenachse:

$$S_y(0/c)$$
$$\underline{\underline{S_y(0/\frac{9}{2})}}$$

	Maximum	Abzug
x_1 und x_2 berechnen (je 1)	2	pro Fehler: -1
x_s und y_s berechnen (je 1)	2	pro Fehler: -1
Nullstellen und Scheitelpunkt also Punkt korrekt dargestellt	1	pro Fehler: -1
Sy „berechnen" und angeben	1	pro Fehler: -1

b) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen in das vorgegebene Koordinatensystem.
(Für die Parabel zeichnen Sie mindestens die Punkte von a) ein!)

Lösung b):



	Maximum	Abzug
Parabel (mit mind. S, S_y, und Nullstellen)	3	pro Fehler: -1
Gerade	1	Fehler:-1

c) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte der beiden Funktionen.

Lösung c):

$$\frac{1}{2}x^2+5x+\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{2}$$

$$x^2+10x+9=-3x-21$$

$$x^2+13x+30=0$$

$$(x+3)(x+10)=0$$

$$\underline{x_1=-3, \quad x_2=-10}$$

In eine von beiden Funktionsgleichung: $\Rightarrow \underline{y_1=-6, \quad y_2=4.5}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(-3/-6),\ S_2(-10/4.5)}}$$

	Maximum	Abzug
Gleichsetzen der Fkt.-Glg'en	1	Fehler: -1
x_1 und x_2 berechnen	2	pro Fehler:-1
y_1 und y_2 berechnen	1	Fehler: -1
Beide Lösungen als Punkte dargestellt	1	Fehler: -1

6. Ungleichungen

Lösen Sie folgende Ungleichung in der Grundmenge der rationalen Zahlen.

$$\frac{2}{x+4}-\frac{6}{x-3}\le\frac{10}{x^2+x-12}$$

Lösung:

D = Q\{-4,3}

$$\frac{2}{x+4}-\frac{6}{x-3}\le\frac{10}{(x+4)(x-3)} \quad \Big|\cdot(x+4)(x-3)$$
$$2(x-3)-6(x+4)\le 10$$
$$2x-6-6x-24\le 10$$
$$-40\le 4x$$

$-10\le x$, wenn $(x+4)(x-3)$ positiv
$-10\ge x$, wenn $(x+4)(x-3)$ negativ

-4 0 3

Fall	positiv	negativ	positiv
Bereich	$x<-4$	$-4<x<3$	$x>3$
Lösung	$x\ge -10$	$x\le -10$	$x\ge -10$
effektive Lösung	$-10\le x<-4$	$\{\ \}$	$x>3$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L=\{x\in Q\mid -10\le x<-4 \quad \vee \quad x>3\}}}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	1	Fehler: -1
Ungl. nach x aufgelöst	1	Fehler: -1
Ganze Analyse	4	pro Fehler: -1
Lösungsmenge	1	Fehler: -1

7. Lineare Optimierung

Schneider Peter hat pro Monat (4 Wochen) 75 m^2 Wollstoff und 50 m^2 Seidenfutter zur Verfügung. Er fertigt daraus Anzüge und Kleider für ein Konfektionsgeschäft an. Für einen Anzug benötigt er 4 m^2 Stoff für ein Kleid 3.5 m^2. Vom Seidenfutter muss er für einen Anzug 2.75 m^2 und für ein Kleid 3 m^2 verwenden. Die Arbeit für ein Kleid dauert 4.5 Stunden, für einen Anzug 3.75 Stunden. Er darf aber nicht mehr als 42 Stunden pro Woche arbeiten. Von den Kleidern dürfen höchstens um die Hälfte mehr produziert werden als von den Anzügen. Der Gewinn beträgt bei einem Anzug CHF 60.-, bei einem Kleid CHF 80.-. Natürlich möchte er seinen Gewinn maximieren.

a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Ungleichungen, die zu den Bedingungen gehören an. x gibt die Anzahl Anzüge im Monat und y die Anzahl Kleider im Monat an. **(Keine Grafik!)**

Lösung a):

$\underline{D = N_0 \times N_0}$

1) $4x + 3.5y \leq 75$

2) $2.75x + 3y \leq 50$

3) $4.5x + 3.75y \leq 4 \cdot 42$

4) $y \leq 1.5x$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	1	Fehler: -1
Bedingungen: 1) und 2) zusammen 1Pkt, 3) und 4) je 1 Pkt.	3	Bed. 1) oder 2) falsch: -1 Bed. 3) falsch: -1 Bed. 4) falsch: -1

b) Bestimmen Sie die Zielfunktion rechnerisch.

Lösung b):

$$z = 60x + 80y$$

	Maximum	Abzug
Zielfunktion	1	Fehler: -1

c) Ein anderer Schneider, Lukas, der ein ähnliches Problem hatte, kam auf folgende Bedingungen und Zielfunktion:

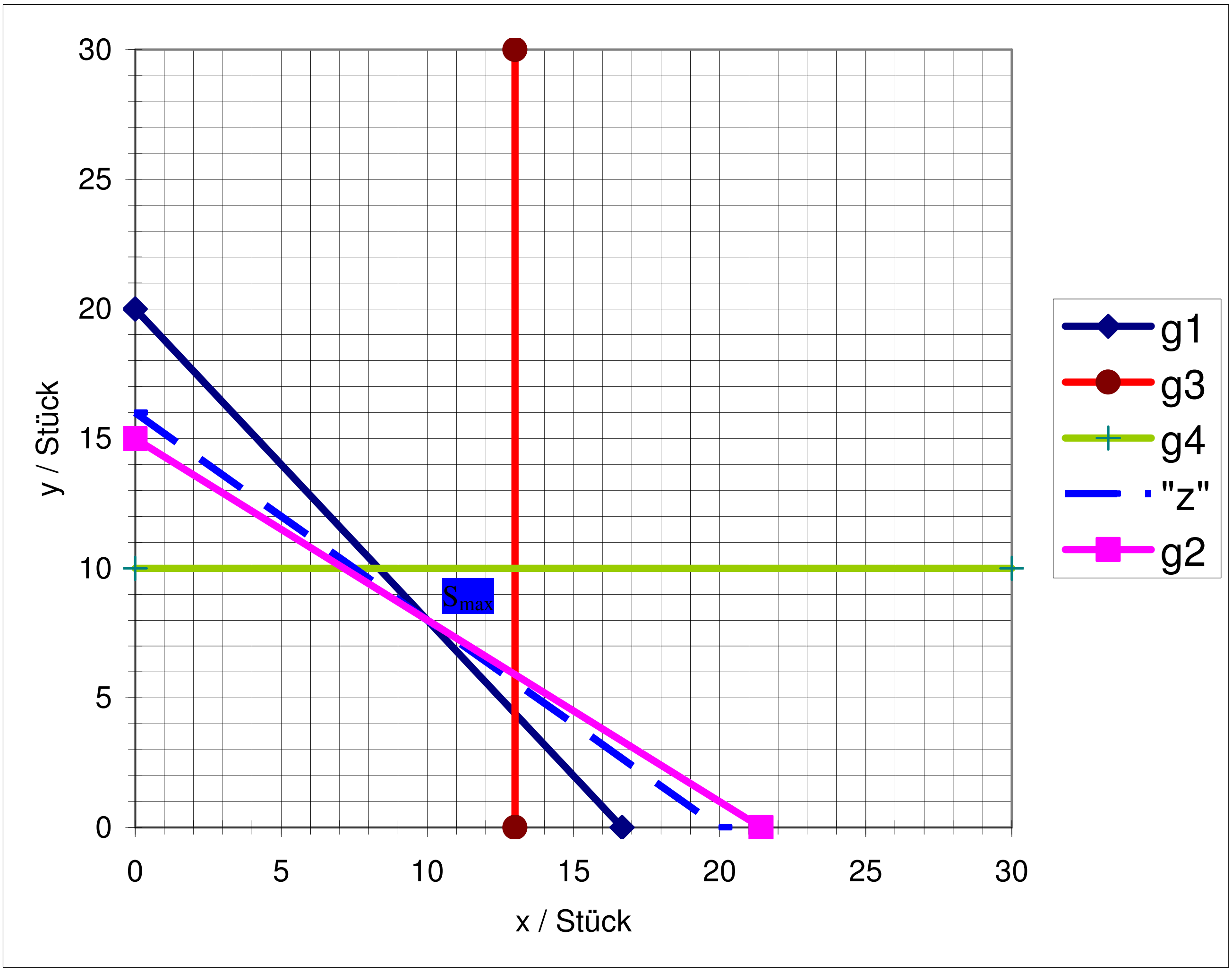
1) $3x + 2.5y \leq 50$
2) $1.75x + 2.5y \leq 37.5$
3) $x \leq 13$
4) $y \leq 10$

$z = 40x + 50y$

Zeichnen Sie nun diese Bedingungen von Lukas in das vorgegebene Koordinatensystem ein (jeweils mit entsprechendem Richtungspfeil). Die Zielgerade zeichnen Sie gestrichelt ein. Die Lösungsfläche ist farblich oder durch Schraffur hervorzuheben.

d) Bestimmen Sie für Lukas grafisch (einzeichnen) und rechnerisch die Anzahl Anzüge und Kleider, die zu einem maximalen Gewinn führen.

Lösung c) und d):



$$
\begin{array}{lll}
1)\ 3x+2.5y\le 50 & \Rightarrow & y=-1.2+20,\quad \le \\
2)\ 1.75x+2.5y\le 37.5 & \Rightarrow & y=-0.7+15,\quad \le \\
3)\ x\le 13 & \Rightarrow & x=13,\quad \le \\
4)\ y\le 10 & \Rightarrow & y=10,\quad \le
\end{array}
$$

$$z=40x+50y \qquad \Rightarrow \qquad y=\underline{-\frac{4}{5}}x+\frac{z}{50}$$

g1 und g2 geschnitten bei S_{max}:

$-1.2x+20=-07x+15$

$5=0.5x$

$\underline{10=x}$

$\Rightarrow \underline{y}=-1.2\cdot 10+20=\underline{8}$

$$\underline{\underline{S_{max}(10/8)}}$$

	Maximum	Abzug
Alle Bed. und Zielfunktion auf Geradenglg mit Relation und eingezeichnet (je 1 Pkt.)	5	max. pro Gerade: -1
Lösungsfläche	1	Fehler: -1
S_{max} berechnet und eingezeichnet	2	pro Fehler: -1

e) Wie gross ist der maximale Gewinn von Lukas?

Lösung e)

$\underline{z}=40\cdot 10+50\cdot 8=\underline{800}$

Also der maximale Gewinn ist CHF 800.-.

	Maximum	Abzug
Maximaler Gewinn (mit Einheit Franken)	2	Pro Fehler: -1

8. Finanzmathematik

Ein Kapital ist im Laufe der Zeit von CHF 25`000.- auf CHF 26`804.40 angewachsen. Für die erste Hälfte dieser Laufzeit betrug der Zinssatz 0.75%, für die zweite Hälfte 1%.

a) Während wie vieler Jahre war das Kapital insgesamt angelegt?

b) Nehmen wir an, die Antwort von a) wäre 10 Jahre. Wie gross müsste der <u>konstante</u> Zinssatz (Zinssatz ändert sich nicht während der ganzen Anlegedauer) sein, um den gleichen Endbetrag zu erreichen? (Runden Sie auf eine Nachkommastelle!)

Lösung a:

$$25000 \cdot 1.0075^x 1.01^x = 26804.40$$

$$(1.0075 \cdot 1.01)^x = \frac{26804.4}{25000}$$

$$\log_{1.0075 \cdot 1.01} \frac{26804.4}{25000} = x$$

$$4 = x$$

Also insgesamt während 2*4 = <u>8</u> Jahren!

	Maximum	Abzug
Gleichung	2	pro Fehler: -1
Auflösen und bis zu log	1	Fehler: -1
Log	1	Fehler: -1
Antwort (Lösung x verdoppeln)	1	Fehler: -1

Lösung b:

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$q = \sqrt[10]{\frac{26804.40}{25000}} = 1.00699 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{p = 0.7\%}}$$

	Maximum	Abzug
Formel	1	Fehler: -1
Berechnung	1	Fehler: -1

9. Allgemeines

a) Woran erkenne ich , dass eine quadratische Gleichung keine Lösung hat?

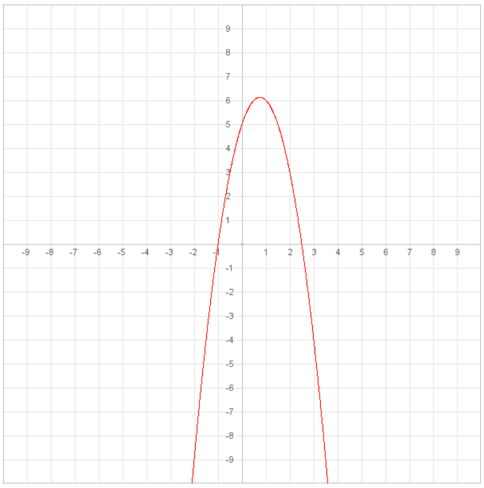
Antwort: Die Diskriminante ist negativ!

b) Tamara und Sandra bekommen von ihren Banken 4% Zins gutgeschrieben. Wer hat nach einem Jahr mehr auf der Bank, wenn

- sie anfangs gleich viel Kapital anlegen,
- bei Tamara quartalsweise und Sandra jährlich verzinst wird?

Antwort: Tamara bekommt mehr!

c) Machen Sie richtige Aussagen über die Parameter (a,b,c) der folgenden Funktion $y = ax^2 + bx + c$:



1. a < 0
2. c > 0
3. b > 0

d) Stimmt die folgende Aussage?

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + \sqrt{2ab} + b$$

Bei Nein, geben Sie bitte die richtige Lösung an!

Antwort: Nein: $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = a + b$

e) Max hat 25% mehr Lohn als Moritz.
Welche Aussagen stimmen?
1) Wenn Moritz`s Lohn CHF 1000.- ist, dann verdient Max CHF 1250.-.
2) Wenn Max`s Lohn CHF 1000.- ist, dann verdient Moritz CHF 750.-.
3) Aussage 1) und 2) stimmen.

Antwort: Nur Aussage 1) stimmt!

	Maximum	Abzug
Je Teilaufgabe 1 Pkt.	5	pro Fehler: -1