WS KV Chur

Abschlussprüfungen 2010
für die Berufsmatura kaufmännische Richtung

Mathematik schriftlich

LÖSUNGEN

Kandidatennummer ______________

Name ______________

Vorname ______________

Datum der Prüfung ______________

Bewertung	mögliche Punkte	erteilte Punkte
1. Aufgabe	10	______
2. Aufgabe	8	______
3. Aufgabe	13	______
4. Aufgabe	15	______
5. Aufgabe	19	______
6. Aufgabe	9	______
7. Aufgabe	17	______
8. Aufgabe	9	______
Total	**100**	______

Note: ______

Material Arbeitsblätter, Zusatzblätter

Hilfsmittel Taschenrechner, Formelblatt

Zeit 150 Minuten

Hinweise

- Der Lösungsweg muss überall übersichtlich dargestellt werden; unbelegte Resultate werden nicht berücksichtigt!
- Mehrfachlösungen sind nicht gestattet; Ungültiges ist deutlich zu streichen. Die gültigen Schlussresultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Alle Ausrechnungen und Resultate schreiben Sie auf diese Blätter, wenn nötig auch auf die Rückseite. Für reine Entwürfe und Versuche verwenden Sie das Zusatzpapier.

1. Algebraische Umformungen

a) Vereinfachen Sie so weit wie möglich und schreiben Sie die Lösung als Wurzel.

$$\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^{-3}}}$$

Lösung:

$$=\left(a^2 \cdot a^{\frac{-3}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\left(2-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}} = a^{\frac{7\cdot 1}{5\cdot 4}} = a^{\frac{7}{20}} = \underline{\underline{\sqrt[20]{a^7}}}$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	3	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

b) Berechnen Sie folgenden Logarithmus-Term. Vereinfachen Sie zuerst.

$$\frac{\log_a(a^6)}{3} - \log_a\left(\frac{a^2}{\sqrt{a}}\right)$$

Lösung:

$$=\frac{\overbrace{\log_a(a^6)}^{=6}}{3} - \log_a\left(\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}}\right) = 2 - \log_a\left(a^{2-\frac{1}{2}}\right) = 2 - \overbrace{\log_a\left(a^{1.5}\right)}^{=1.5} = \underline{\underline{0.5}}$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	3	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

c) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten:

$$\left(\frac{4^{-1}a^{-2}}{c}\right)^2 \div \frac{(2b)^{-2}}{b^{-2}(2a)^3}$$

Lösung:

$$= \frac{4^{-2}\cdot a^{-4}b^{-2}2^3a^3}{c^2 2^{-2}b^{-2}} = \frac{4^{-2}\cdot 2^3}{2^{-2}}\cdot\frac{a^{-4}a^3}{1}\cdot\frac{b^{-2}}{b^{-2}}\cdot\frac{1}{c^2}$$
$$= 2a^{-4+3}\underbrace{b^{-2+2}}_{=1}c^{-2} = \underline{\underline{2a^{-1}c^{-2}}}$$

	Maximum	Abzug
Vereinfachung vom Term	4	Pro Fehler/Unvollständigkeit: 1

2. Gleichungssysteme mit zwei Variablen

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in der Grundmenge G = ℝ x ℝ.

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{45}{3x+27} - \dfrac{12}{6y} = 2.5 \\ \dfrac{20}{x+9} \quad + \dfrac{16}{2y} = -2 \end{array} \right|$$

Lösung:

<u>D = ℝ\{-9} x ℝ\{0}</u>

$$\begin{array}{r} 4\cdot(1) \\ =\dfrac{3}{3}\cdot(2) \end{array} \left| \begin{array}{l} \dfrac{180}{3x+27} - \dfrac{48}{6y} = 10 \\ \dfrac{60}{3x+27} + \dfrac{48}{6y} = -2 \end{array} \right|$$

$$\frac{180}{3x+27} + \frac{60}{3x+27} = 10 - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{240}{3(x+9)} = 8 \quad \Rightarrow \quad 80 = 8(x+9) \quad \Rightarrow \quad \underline{x=1}$$

in (2):
$$\frac{20}{1+9} + \frac{16}{2y} = -2 \quad \Rightarrow \quad 2 + \frac{16}{2y} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{2y} = -4 \quad \Rightarrow \quad 16 = -8y$$

$$\Rightarrow \quad \underline{-2 = y}$$

$$\underline{\underline{L = \{(1/-2)\}}}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	2	Für x und y: -1
x berechnen	3	pro Verfahrensfehler:-2 pro Rechenfehler:-1
y berechnen	2	pro Fehler: -1
Lösungsmenge	1	Fehler:-1

3. Gleichungen

a) Bestimme Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge folgender Gleichung in der Grundmenge ℝ.

$$\frac{x-a}{a} = \frac{x^2}{ax-2a}$$

Lösung:

D = $\mathbb{R}\backslash\{2\} \wedge \ a \neq 0$

$$(x-a)(ax-2a) = ax^2$$
$$ax^2 - 2ax - a^2x + 2a^2 = ax^2$$
$$x(-2a-a^2) = -2a^2$$
$$x = \frac{-2a^2}{(-2a-a^2)} = \frac{-2a}{\underline{-2-a}} = \frac{2a}{\underline{2+a}}$$

$$\underline{\underline{L = \left\{\frac{2a}{2+a}\right\}}} \text{, bei } \underline{\underline{a \neq 0; a \neq -2}}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	2	Ausschluss falsch: -1 Bed. Parameter: -1
x berechnen	3	pro Fehler:-2
Lösungsmenge Resultat, Bed. Parameter: 1 Pkt.	2	Fehler: -1

b) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichung in der Grundmenge $\mathbb{R}$. Die Definitionsmenge und die Lösungsmenge sind anzugeben. Runden Sie auf 2 Nachkommastellen.

$$5^{2x+1} = 10 \cdot 4^{2x}$$

Lösung:

<u>D = $\mathbb{R}$</u>

$$5^{2x} \cdot 5 = 10 \cdot 4^{2x}$$

$$0.5 = \frac{4^{2x}}{5^{2x}}$$

$$0.5 = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x}$$

$$\log_{\frac{4}{5}} 0.5 = 2x$$

$$3.10628 = 2x$$

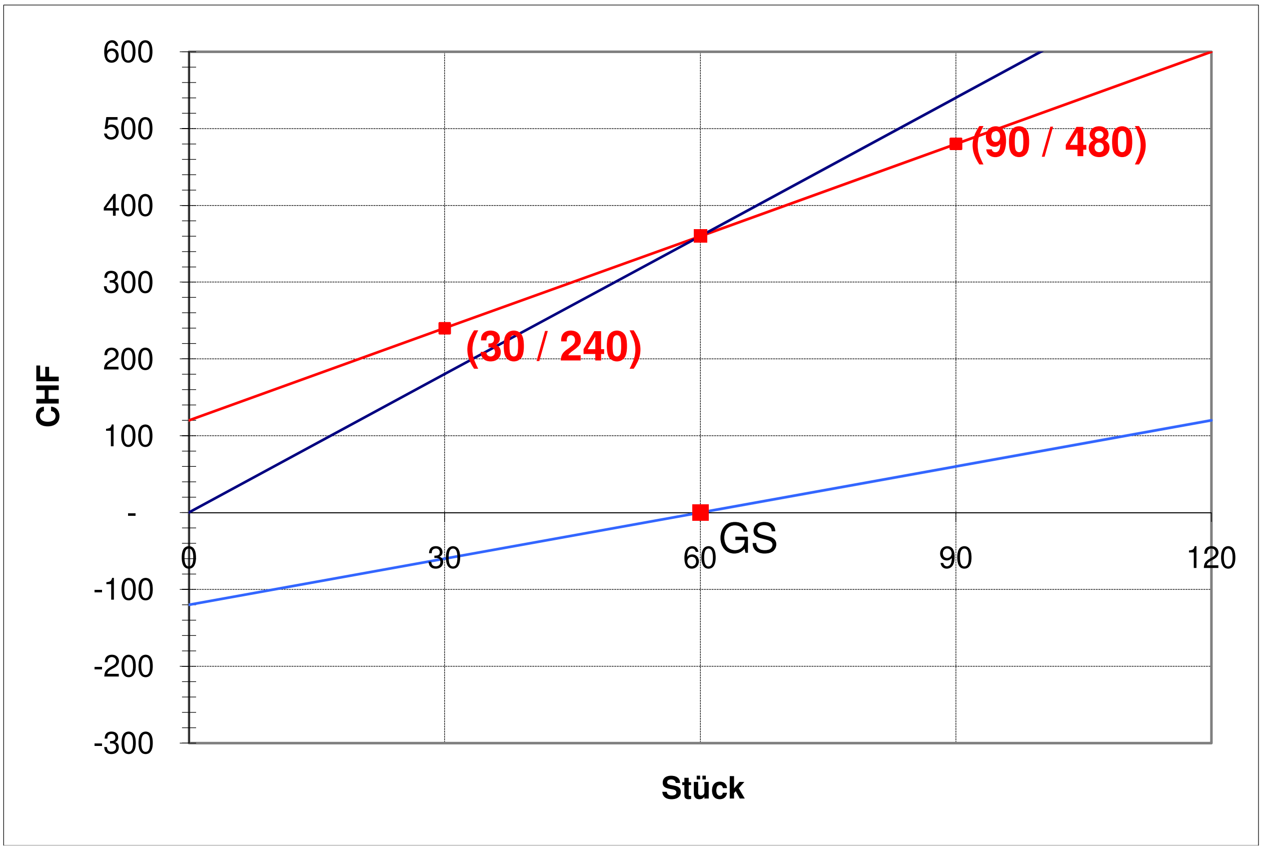
$$1.553 = x$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{L = \{1.55\}}}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	1	Fehler: -1
x berechnen	4	pro Fehler:-2
Lösungsmenge	1	Fehler: -1

4. Lineare Funktionen

Die Firma Sporti produziert Sportsocken. Die Kosten für die Herstellung verlaufen linear, so wie unten dargestellt.



a) Formulieren Sie die Funktionsgleichung für diese Kostenfunktion.

$P_1(30 / 240)$, $P_2(90 / 480)$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{480-240}{90-30} = 4$$

$$\Rightarrow \quad q = 120 \quad (herauslesbar!)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 4x + 120}}$$

	Maximum	Abzug
m berechnen oder herauslesen	2	Fehler: -1
q berecnen oder herauslesen	1	Fehler: -1
Funktionsgleichung	1	pro Fehler:-1

b) Bei 120 verkauften Stück macht die Firma Sporti CHF 120.- Gewinn. Sie muss aber bei 30 verkauften Stück mit einem Verlust von CHF 60.- rechnen.

b1) Wie lautet die Gleichung für die Gewinnfunktion?
b2) Wie lautet die Gleichung für die Erlösfunktion?

Gewinnfunktion:

$$\begin{vmatrix} 120 = m \cdot 120 + q \\ -60 = m \cdot 30 + q \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad 120 - 120m = -60 - 30m \quad \Rightarrow \quad \underline{m = 2}$$

in I: $120 = 2 \cdot 120 + q \quad \Rightarrow \quad \underline{q = -120}$

$$\underline{\underline{y = 2x - 120}}$$

Erlösfunktion:

Gewinnfunktion + Kostenfunktion = Erlösfunktion:

$$+\begin{cases} y = 2x - 120 \\ \underline{y = 4x + 120} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y = 6x}}$$

	Maximum	Abzug
Gleichungssystem und ausrechnen: (m 2 Pkte, q 1 Pkt.)	3	Fehler: -1
Funktionsgleichungen	1	pro Fehler:-1
Erlösfunktion ausrechnen (1 Pkt.) Gleichung (1 Pkt.)	2	Fehler:-1

c) Zeichnen Sie die Funktionen von b) in das obige Koordinatensystem ein. Alle Funktionen sind anzuschreiben.

	Maximum	Abzug
Je Gerade 1 Punkt	2	Fehler: -1

d) Bestimmen Sie die Gewinnschwelle (Nutzschwelle) grafisch (einzeichnen) und rechnerisch?

1. Variante:
(Gewinnfunktion Null setzen)

$$0 = 2x - 120$$
$$120 = 2x$$
$$\underline{\underline{60 = x}}$$

2. Variante:
(Erlös- mit Kostenfunktion gleich setzen)

$$4x + 120 = 6x$$
$$120 = 2x$$
$$\underline{\underline{60 = x}}$$

	Maximum	Abzug
Einzeichnen	1	Fehler: -1
Gewinnschwelle berechnet	2	Fehler:-1 wenn Idee falsch, dann 0 Punkte!

5. Quadratische Funktionen

Gegeben sind folgende zwei Funktionen:

f_1: $y = x^2 - 8x + 12$
f_2: $y = 2x + q$

a) Berechnen Sie von der Parabel den Scheitelpunkt und die Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen.

Lösung a):

Nullstellen:

$$0 = x^2 - 8x + 12$$

$$0 = (x-2)(x-6)$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{N_1(2/0), \quad N_2(6/0)}}$$

Scheitelpunkt:

1. Variante:

$$x_s = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \quad y_s = (4)^2 - 8(4) + 12 = -4$$

2. Variante:

$$S\left(\frac{-b}{2a} / c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$S\left(\frac{8}{2} / 12 - \frac{64}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S(4/-4)}}$$

Schnittpunkt mit y-Koordinatenachse:

$$S_y(0/c)$$

$$\underline{\underline{S_y(0/12)}}$$

	Maximum	Abzug
x_1 und x_2 berechnen (je 1)	2	pro Fehler: -1
x_s und y_s berechnen (je 1)	2	pro Fehler: -1
Nullstellen und Scheitelpunkt also Punkt korrekt dargestellt	1	pro Fehler: -1
Sy „berechnen“ und angeben	1	pro Fehler: -1

b) Wie gross muss q bei f_2 sein, damit die Parabel und Gerade nur einen Schnittpunkt (Berührungspunkt) haben?

Lösung b):

$$x^2 - 8x + 12 = 2x + q$$
$$x^2 - 10x + 12 - q = 0$$
$$\Rightarrow Diskrimante = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$100 - 4 \cdot 1 \cdot (12 - q) = 0$$
$$100 - 48 + 4q = 0$$
$$52 = -4q$$
$$\underline{\underline{-13 = q}}$$

	Maximum	Abzug
Gleichsetzen der Fkt.-Glg'en	1	Fehler: -1
Gemeinsame Gleichung (quadr. Normalf.)	1	pro Fehler:-1
Idee Diskrimante Null setzen	1	Fehler: -1
Einsetzen und berechnen	2	Fehler: -1

c) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte der Funktion

$$y = x^2 - 8x + 12$$

mit

$$y = 2x - 4.$$

$$x^2 - 8x + 12 = 2x - 4$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0$$
$$(x-2)(x-8) = 0$$
$$\underline{x_1 = 2, \quad x_2 = 8}$$

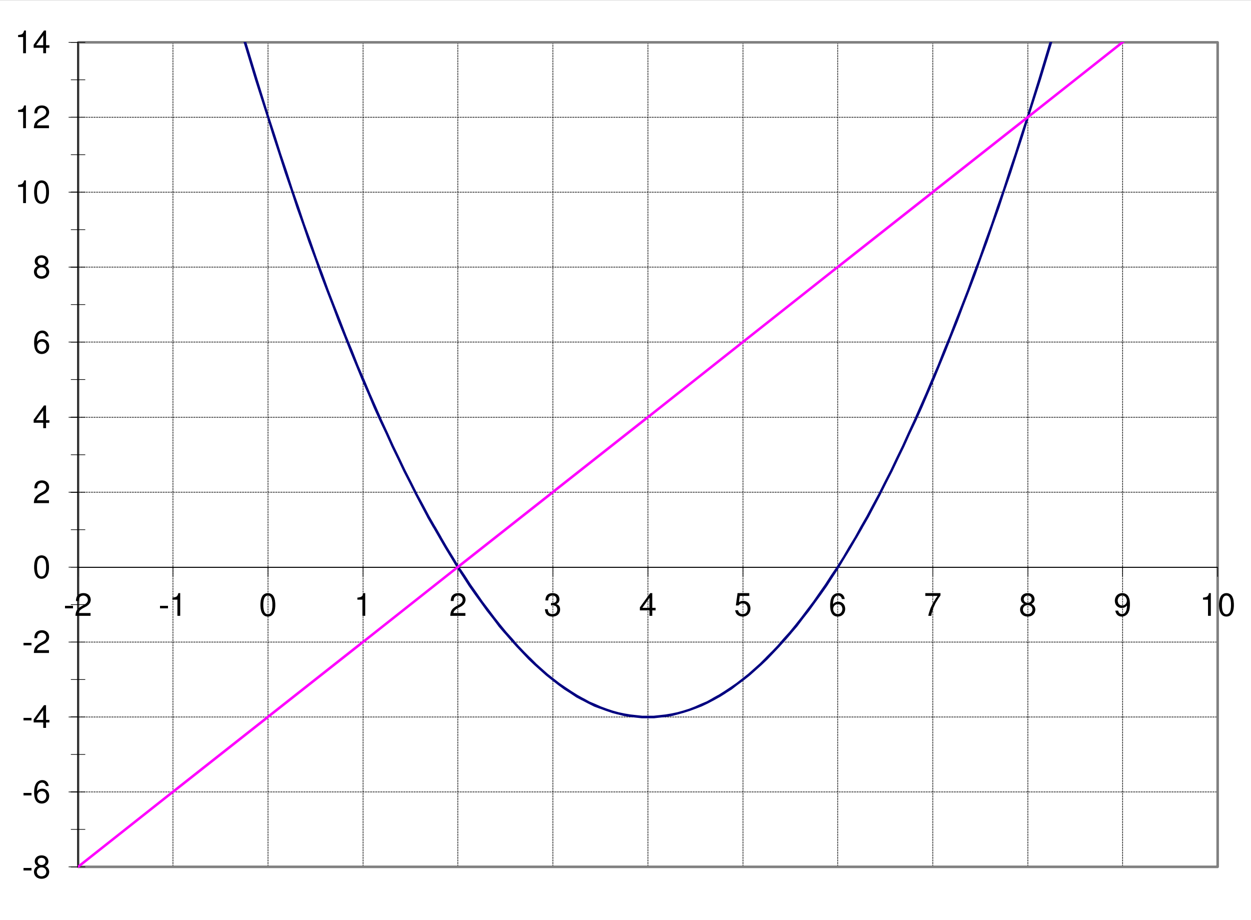
In eine von beiden Funktionsgleichung: $\Rightarrow \underline{y_1 = 0, \quad y_2 = 12}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(2/0),\ S_2(8/12)}}$$

	Maximum	Abzug
Gleichsetzen der Fkt.-Glg'en	1	Fehler: -1
x_1 und x_2 berechnen	2	pro Fehler:-1
y_1 und y_2 berechnen	1	Fehler: -1
Beide Lösungen als Punkte dargestellt	1	Fehler: -1

d) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen von c) in das vorgegebene Koordinatensystem.
(Für die Parabel zeichnen Sie mindestens die Punkte von a) ein!)

Lösung c):



	Maximum	Abzug
Parabel (mit mind. S, S_y, und Nullstellen)	2	pro Fehler: -1
Gerade	1	Fehler:-1

6. Ungleichungen

Lösen Sie folgende Ungleichung in der Grundmenge der rationalen Zahlen.

$$\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x+3}\geq\frac{7x+3}{x^2-9}$$

Lösung:

D = Q\{-3,3}

$$\frac{5}{x-3}-\frac{4}{x+3}\geq\frac{7x+3}{(x-3)(x+3)} \quad \big|\cdot(x-3)(x+3)$$

$$5(x+3)-4(x-3)\geq 7x+3$$

$$5x+15-4x+12\geq 7x+3$$

$$x+27\geq 7x+3$$

$$24\geq 6x$$

$4\geq x$, wenn $(x-3)(x+3)$ positiv
$4\leq x$, wenn $(x-3)(x+3)$ negativ

-3 0 3

Fall	positiv	negativ	positiv
Bereich	$x<-3$	$-3<x<3$	$x>3$
Lösung	$x\leq 4$	$x\geq 4$	$x\leq 4$
effektive Lösung	$x<-3$	$\{\ \}$	$3<x\leq 4$

$$\Rightarrow \quad L=\left\{x\in Q \,\middle|\, x<-3 \quad\vee\quad 3<x\leq 4\right\}$$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	1	Fehler: -1
Ungl. nach x aufgelöst	3	Fehler: -1
Ganze Analyse	4	pro Fehler: -1
Lösungsmenge	1	Fehler: -1

7. Lineare Optimierung

Die Firma Trendy handelt mit zwei verschiedene Armbändchen. Das erste Modell ist aus Leder und das zweite aus Plastik. Von den Ledernen will sie höchstens 5 mal so viele verkaufen wie von denen aus Plastik, aber mindestens gleich viele. Insgesamt werden höchstens 250 Armbändchen pro Monat verkauft. Der Einkaufspreis für ein Leder-Armband liegt bei CHF 7.-, der eines aus Plastik bei CHF 4.-. Das Jahresbudget der Firma von CHF 16`000.- soll beim Einkauf nicht überschritten werden.

Der Verkaufspreis für ein Leder-Armband liegt bei CHF 17.-, für ein Plastik-Armband bei CHF 9.-. Die Firma Trendy möchte ihren Gewinn maximieren.

a) Geben Sie die Definitionsmenge und die Ungleichungen, die zu den Bedingungen gehören, an. x gibt die Anzahl Lederarmbändchen im Monat und y die Plastikarmbänchen im Monat an.
(Keine Grafik!)

Lösung a):

$\underline{D = N_0 \times N_0}$

1) $x \leq 5y$

2) $x \geq y$

3) $x + y \leq 250$

4) $7x + 4y \leq \frac{16000}{12}$

	Maximum	Abzug
Definitionsmenge	1	Fehler: -1
Bedingungen: je 1 Pkt.	4	Bed. falsch: -1

b) Bestimmen Sie die Zielfunktion rechnerisch.

Lösung b):

$$z = (17-7)x + (9-4)y$$

$$\underline{z = 10x + 5y}$$

	Maximum	Abzug
Gewinn = Erlös minus Kosten	1	Fehler: -1
Zielfunktion	1	Fehler: -1

c) Eine andere Firma, wristlet-store, handelt mit den gleichen Armbändchen. Sie kam auf folgende Bedingungen und Zielfunktion:

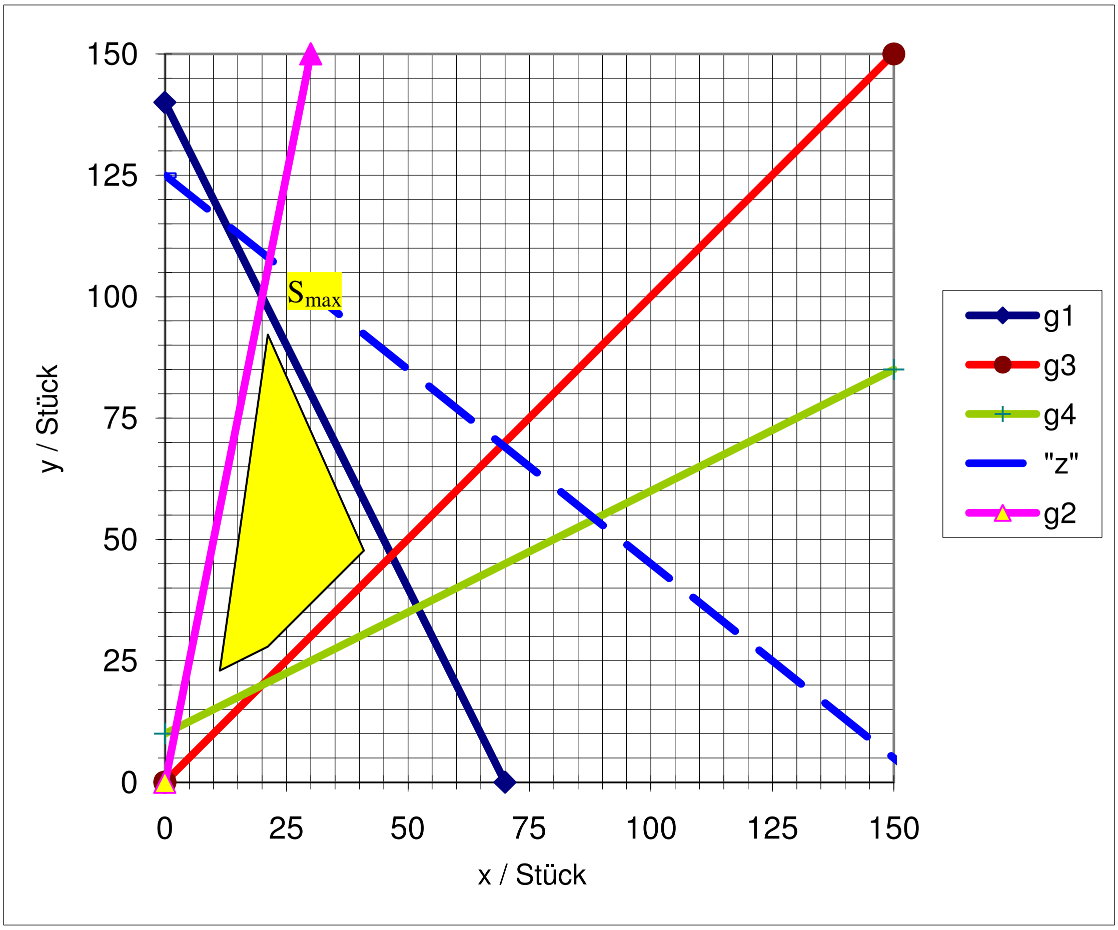
1) $4x + 2y \leq 280$
2) $y \leq 5x$
3) $y \geq x$
4) $y - 0.5x \geq 10$

Zielfunktion: $z = 4x + 5y$

Schreiben Sie alle Bedingungen für wristlet-store als Geraden und zeichnen Sie diese in das vorgegebene Koordinatensystem ein (jeweils mit entsprechendem Richtungspfeil). Alle Geraden sind beschriften. Die Lösungsfläche ist farblich oder durch Schraffur hervorzuheben.

Lösung c):

1) $4x + 2y \leq 280$	$\Rightarrow$	$y = -2x + 140, \quad \leq$
2) $y \leq 5x$	$\Rightarrow$	$y = 5x, \quad \leq$
3) $y \geq x$	$\Rightarrow$	$y = x, \quad \geq$
4) $y - 0.5x \geq 10$	$\Rightarrow$	$y = 0.5x + 10, \quad \geq$
$z = 4x + 5y$	$\Rightarrow$	$y = \underline{-\frac{4}{5}}x + \frac{z}{5}$



d) Bestimmen Sie für wristlet-store grafisch (einzeichnen) und rechnerisch die Anzahl der Armbändchen, die zu einem maximalen Gewinn führen.

Lösung d):

g1 und g2 geschnitten bei S_{max}:

$-2x + 140 = 5x$

$140 = x$

$\underline{20 = x}$

$\Rightarrow \underline{y} = 5 \cdot 20 = 100$

$$\underline{\underline{S_{max}(20/100)}}$$

	Maximum	Abzug
Alle Bed. und Zielfunktion auf Geradenglg. mit Relation und eingezeichnet (je 1 Pkt.)	5	max. pro Gerade: -1
Lösungsfläche	1	Fehler: -1
S_{max} berechnet (2 Pkte) und eingezeichnet (1 Pkt.)	3	pro Fehler: -1

e) Wie gross ist der maximale Gewinn von wristlet-store?

Lösung e)

$\underline{z} = 4 \cdot 20 + 5 \cdot 100 = \underline{580}$

Also der maximale Gewinn ist CHF 580.-.

	Maximum	Abzug
Maximaler Gewinn (mit Einheit Franken)	1	Pro Fehler: -1

8. Finanzmathematik

a) Ein Darlehen von CHF 30'000.- soll in zwei gleich hohen Raten zurückbezahlt werden.

- 1. Rate, nach 5 Jahren
- 2. Rate, nach weiteren 5 Jahren

Wie hoch sind die beiden Raten, wenn die Verzinsung 9% beträgt?
Lösung a):

$$(30000 \cdot 1.09^5 - x) \cdot 1.09^5 = x$$
$$30000 \cdot 1.09^5 \cdot 1.09^5 = x + 1.09^5 x$$
$$30000 \cdot 1.09^5 \cdot 1.09^5 = (1 + 1.09^5)x$$
$$\frac{30000 \cdot 1.09^5 \cdot 1.09^5}{1 + 1.09^5} = x$$
$$\underline{x = 27976.15}$$

Jede Rate ist CHF 27`976.15 hoch.

	Maximum	Abzug
Gleichung	3	pro Fehler: -1
Auflösen	2	Fehler: -1

b) Beim Erwerb einer Eigentumswohnung liegt folgende vertragliche Vereinbarung zugrunde:

- Barzahlung von CHF 300'000.- sofort
- 1. Rate von CHF 350'000.-, zahlbar nach 5 Jahren
- 2. Rate von CHF 400'000.-, zahlbar nach 10 Jahren

Wie hoch ist der effektive Kaufpreis der Eigentumswohnung, wenn mit einem Zinssatz von 9% gerechnet wird?

Lösung b):

$$\frac{400000}{1.09^{10}} + \frac{350000}{1.09^{5}} + 300000 = 696`440.30$$

	Maximum	Abzug
Formel Barwert	1	Fehler: -1
Idee/Struktur	2	Fehler: -2
Berechnung	1	Fehler: -1